Кирилл Левин

Татьяна Стоянова

Юрий Кузьмин

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям для студентов специалитета направления подготовки 21.05.06

Санкт Петербург

Горный университет

2019

Физика. Электростатика

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям для студентов специалитета направления подготовки 21.05.06

Данное пособие содержит материалы для самостоятельной подготовки студентов по теме «электростатика». Может быть полезно как студентам, так и преподавателям, содержа материал для нескольких лекций. Предполагает наличие предварительных знаний по базовым курсам механики и термодинамики.

Научный редактор: В.В. Томаев

Технический редактор: Раджан Сингх

Санкт-Петербургский горный университет, факультет Фундаментальных и гуманитарных дисциплин, кафедра Общей и технической физики

Тираж 100 экз

ISBN-13: 978-1985066861
ISBN-10: 1985066866

УДК 537.2
ББК 22.33

СОДЕРЖАНИЕ

Коротко об авторах

Кузьмин Юрий Ильич 1950 года рождения в 1974 году окончил Ленинградский Электротехнический институт, кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского горного университета; автор более 80 научных и учебно-методических работ, почетный работник высшего образования Российской Федерации.

Стоянова Татьяна Вячеславовна. закончила электрофизический факультет Ленинградского электротехнического института (ЛЭТИ). Получила степень кандидата технических наук и учёное звание доцента по кафедре физики в Санкт-Петербургском государственном горном институте имени Г.В. Плеханова (ТУ). В настоящее время преподаёт в Санкт-Петербургском Горном университете (Россия) все разделы общей физики, изучаемые студентами 1-3 курсов.

Левин Кирилл Львович закончил радиофизический факультет Ленинградского Политехнического института. Получил степень доктора философии в университете Цинциннати (Огайо, США) (UC). Работал пост-доком в университете штата Северная Дакота, США (NDSU). В настоящее время преподает в Санкт-Петербургском Горном университете (Россия) все разделы общей физики, изучаемые студентами 1-3 курсов. Главный редактор нескольких научных журналов.

Введение

В данных методических указаниях по теме «электростатика» содержатся теоретические сведения и примеры решения задач, призванных способствовать самостоятельной работе студентов в качестве внеаудиторного чтения и выполнения расчетно-графических работ.

Начиная с исторического аспекта, рассматриваются эксперименты по генерации электрических зарядов и исследованию их взаимодействия (закон Кулона), вводятся понятия напряженности поля, потенциала. Рассматривается их связь. Вводится понятие потока. Теорема Остроградского-Гаусса выводится в интегральной и дифференциальной форме. Даются необходимые математические определения в формализации с использованием оператора Гамильтона. Обсуждается визуализация электрического поля с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

Каждый из разделов снабжен примерами задач с решениями.

В конце предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Предмет электростатики

Сложно сказать какие опыты навели человечество на мысль о существовании электрических зарядов. Возможно этому послужили опыты с янтарем, обладающим, говоря современным языком, способностью к электризации. Этот опыт легко повторить в домашних условиях. Если натереть кусочек янтаря тканью, к нему будут притягиваться мелкие диэлектрические предметы, например клочки бумаги.

Так же явление электризации можно наблюдать при ношении одежды, в состав которой входит синтетика. При ношении такой одежды между вами и окружающими предметами могут проскакивать искры.

Сами по себе указанные опыты еще не свидетельствуют о наличии в природе электрических зарядов. Скорее, они могут наводить на подобные мысли.

Если попросить студентов объяснить опыт с янтарем, можно услышать примерно следующее. «При трении янтаря тканью, электроны переходят с янтаря на ткань. И поэтому, поскольку разноименные заряды притягиваются, к кусочку янтаря (или эбонитовой палочке, или расческе, если опыт проводить не с янтарем, а с эбонитовой палочкой или расческой) будут притягиваться… кусочки бумаги» Хотя в начале курса «Электричество и магнетизм» студенты еще «официально» не знакомы с понятием электрического заряда и условиями взаимодействия зарядов, у студентов есть подобные знания из школьного курса физики и источников информации по элементарной физике, таких, как научно-популярная литература и интернет. Поэтому студенты думают, что могут объяснить этот на первый взгляд простой опыт «с бумажками». На самом деле в предлагаемом объяснении содержится логическое несоответствие. Если электроны переходят с янтаря на ткань (что соответствует действительности), то почему к янтарю притягиваются электрически незаряженные кусочки бумажки? Заряды вряд ли смогли перейти с ткани на эти кусочки, потому что как ткань, так и бумага обладает очень высоким электрическим сопротивлением. Следовательно, предлагаемое студентами объяснение является неверным.

С правильным объяснением данного явления мы познакомимся в процессе изучения электростатики.

***Электростатикой** называется раздел физики, занимающийся изучением стационарных (не зависящих от времени) электрических полей, созданных неподвижными (в лабораторной системе отсчета) зарядами.*

Взаимодействие неподвижных электрических зарядов

Экспериментальное подтверждение существования электрических зарядов следует из закона Кулона. Для того, чтобы провести опыт Кулона, необходимо, получить электрические заряды. Одним из способов их получения является опыт с янтарем. В лабораторных условиях для получения, а точнее, разделения электрических зарядов используют устройство, называемое электрофорной машиной.

Опыт по разделению зарядов

Экспериментально разделение зарядов трением реализовано в так называемой электрофорной машине (Рис. 1). Именно такое устройство для разделения зарядов пользовалось до конца XVIII века в технических источниках тока. В электрофорной машине (ЭМ) диски машины приводятся во вращение в противоположных направлениях. На дисках нанесены металлические полоски, заряд с которых снимают неподвижно закреплённые кисточки. Конструкция машины позволяет снимать заряд таким образом, чтобы положительный и отрицательный заряды накапливались на разных обкладках конденсатора, представляющего в нашем случае т. н. лейденскую банку. Простейшая **Лейденская банка** выглядит как *стеклянный цилиндр, одна из образующих которого обвёрнута листом металлической фольги.* Система, состоящая из двух лейденских банок представляет собой обычный электрический конденсатор, в котором заряд одного знака накапливается на одной, а противоположного – на другой обкладке, разделенных диэлектриком. В данном примере механическая энергия преобразуется в электрическую энергию. Объяснение работы ЭМ явления изложен на стр. 46, после объяснения задействованных в его природе физических законов.

Если подсоединить к разным полюсам лейденской банки провода и сблизить из концы, заряды начнут переходить с одного провода на другой. Такой процесс в воздухе сопровождается образованием искры и характерным треском (Рис. 1).

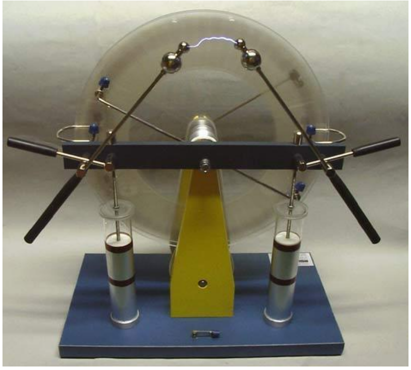


Рис. 1 – Электрофорная машина.

Электрические заряды, полученные с помощью электрофорной машины, можно использовать для постановки опыта Кулона.

Закон Кулона

Рассмотрим два проводящих шарика. Один из них неподвижно зафиксирован, другой уравновешен на упругой нити так, что в уравновешенном состоянии соприкасается с первым (Рис. 2). Шарики будем считать абсолютно одинаковыми. Сообщим одному из шариков электрический заряд, например снятый с Лейденской банки. Заряды распределяться между ними одинаково. К примеру, если на первый перешло 1000 электронов, то после соприкосновения на обоих будет по 500. И тут будем наблюдать то, что наблюдал Кулон. Одноименно заряженные шарики начнут отталкиваться. Силу, с которой они отталкиваются, легко найти, зная вращательную упругость нити. Окажется, что сила, с которой шарики отталкиваются, обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами шариков. Видоизменим опыт. Учитывая, что заряды на Лейденских банках в точности равны и противоположны по знаку, передадим разным шарикам разноименные заряды с разных Лейденских банок. Предварительно добьемся того, чтобы равновесному положению соответствовало некоторое угловое расстояние меду шариками. Тогда нить, на которой подвешен второй шарик, закрутится на некоторый угол, указывая на притяжение шариков, сила которого будет обратно пропорциональна квадрату расстояния, так же как и в первом случае – сила отталкивания.

Задумаемся о носителях заряда в первом и втором из рассматриваемых случаях. Носителем отрицательного заряда является электрон. Понятие «электрон» как неделимая частица ввел электрохимик Дж. Стоуни в 1894 г., обнаружен он был позже: в 1897 г. Э. Вихертом и Дж. Томсоном. Немного забегая вперед отметим, что такой «удобной» частицы, как электрон, для переноса положительного заряда не существует. Положительный заряд несет в себе так называемый «протон», который достаточно трудно привести в движение. Почему же можно говорить о перетекании положительного заряда? Да просто потому, что перетекание в одну сторону (например слева направо) отрицательного заряда равносильно перетеканию в противоположную сторону (справа налево) положительного заряда.

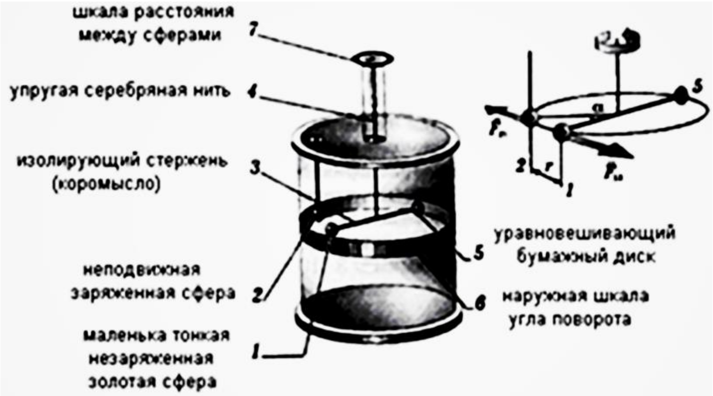


Рис. 2. Схематическое изображение опыта Кулона.

Обобщая, можно сформулировать **закон Кулона:** *Сила взаимодействия двух точечных неподвижных заряженных тел в вакууме прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.* (Рис. 3).

В данной форме закон сформулировал Шарль Кулон в 1785 г.

В скалярной форме (упрощенно) закон можно записать как

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} \qquad (1)$$

где r – расстояние между зарядами (Рис. 3).

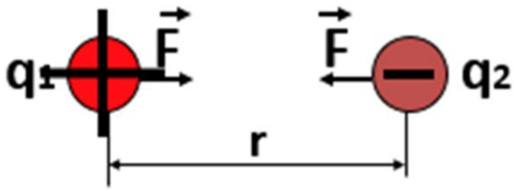


Рис. 3 – К закону Кулона.

Более правильно записать закон Кулона в векторной форме:

$$\vec{F} = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (2)$$

Где q_1 и q_2 заряды, $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ радиус-векторы, проведенные из начала координат к взаимодействующим зарядам. При этом будем учитывать (Рис. 4)[1]:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (3)$$

и

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}^{\,2}} \qquad (4)$$

.

[1] Напомним, что значок «≡» имеет смысл «переобозначение» или, по-другому, «тождественное равенство».

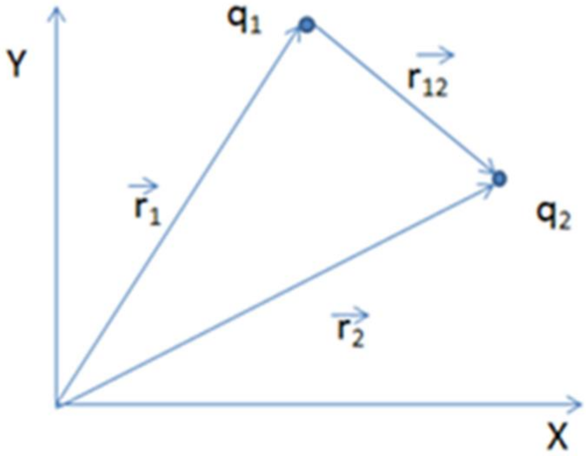


Рис. 4. Напоминание правила вычитания векторов.

Иногда пользуются формулировкой

$$\vec{F}_{21} = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\left|\overrightarrow{r_{21}}\right|^3}\overrightarrow{r_{21}} \qquad (5)$$

,

По сути повторяющей (2) в несколько иной форме записи.

Коэффициент k в формулах, записанных выше, не имеет специального названия. Справедливо:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (6)$$

,

где

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Ф/м}\,, \qquad (7)$$

и называется электрической постоянной. Так же, как и k, ε_0 встречаются только в системе СИ и существуют для придания величинам размерности, принятой в инженерных расчетах. Они не имеют особого физического смысла. В системе СГС их нет. Единца «Кулон» (Кл), входящая в (*7*) является единицей электрического заряда и равна заряду, переносимом током силой 1 ампер за 1 секунду.

Дальнодействие закона Кулона

Закон Кулона является так называемым «дальнодействующим» законом, поскольку сила взаимодействия зарядов пропорциональна квадрату расстояния в степени минус два. Такую же зависимость имеет гравитационное взаимодействие, про которое известно, что оно связывает звезды в пределах одной галактики и галактики в скоплениях. Однако на больших расстояниях его никто не проверял, поэтому «дальнодействие» закона Кулона носит характер математически обоснованной гипотезы. Отметим, что взаимодействия, пропорциональные более высоким степеням расстояния в знаменателе, как, например, Ван-Дер-Ваальсово (Табл. 3), в отличие от дальнодействующих, называются близкодействующими.

Свойства электрического заряда

Обсуждая закон Кулона приходится считаться с экспериментально установленным фактом: наэлектризованные предметы взаимодействуют (притягиваются или отталкиваются) на расстоянии. При этом для того, чтобы охарактеризовать силу взаимодействия, вводят понятие заряда, а для того, чтобы объяснить сам факт взаимодействия, вводят понятие электрического поля. Про электрическое поле можно сказать только то, что оно проявляется при взаимодействии зарядов, и это форма существования материи. Если бы не закон Кулона, об электрическом поле не было бы ничего известно. Начнем разбираться с введенными понятиями более подробно.

Дадим определение **Электрического заряда** как *скалярной физической величины, определяющей интенсивность электромагнитных взаимодействий.*

Заряд - одно из свойств материи, тогда как электрическое поле – форма существования материи.

Важнейшими свойствами электрического заряда являются:

1. Дискретность.
2. Сохраняемость.
3. Инвариантность по отношению к преобразованию Лоренца.

Свойство дискретности заключается в том, что мельчайшие порции измеряемых экспериментально зарядов равны или кратны заряду электрона. Из ядерной физики известно, что существуют и дробные заряды, равные одной трети и двум третям заряда электрона. Частицы, носящие такие заряды, называются кварки. Из кварков состоят протоны и нейтроны. Однако в свободном состоянии кварки обнаружить не удается. Отсутствие в природе свободных кварков называется принципом кваркового конфайнмента. Впрочем, обсуждают наличие свободных кварков, оставшихся после Большого Взрыва, однако найти их, если они действительно есть, очень сложно.

Наиболее важными для нас носителями заряда, помимо электронов, являются протоны (Табл. 1), заряд которых в точности равен электронному, но противоположен по знаку. Так же полезно различать позитроны – частицы с зарядом, совпадающим с зарядом электрона, но противоположным по знаку, и массой в точности равной массе электрона, и антипротоны -- частицы с зарядом, равным заряду электрона (то есть отрицательным зарядом), и массе, равной массе протона. Для полноты картины отметим, что существуют частицы, нейтроны, масса которых близка к массе протона, но заряд равен нулю. В отличие от ранее описанных частиц, нейтроны не являются стабильными. Среднее время их жизни составляет порядка 18 минут, что не много и не мало с точки зрения ядерной физики.

Стабильность позитронов и антипротонов довольно условна. Будучи стабильными «по отдельности» они являются так называемыми «античастицами» -- то есть «противоположностями» классических частиц. Наша Вселенная состоит из классических частиц. Это значит, что если позитрон в результате какой-либо ядерной реакции зародится в нашей Вселенной, он будет существовать до тех пор, пока не встретится с электроном. А эта встреча, если не принимать никаких специальных мер, произойдет скоро, поскольку электроны входят в состав всех молекул. При взаимодействии электрона с позитроном или протона антипротоном произойдет аннигиляция – превращение вещества в «чистую» энергию в соответствии с формулой Эйнштейна

Табл. 1. Некоторые элементарные частицы и их основные характеристики.

Название \ Характеристика	Протон	Нейтрон	Электрон
Заряд	$+1.6\cdot10^{-19}$ Кл	0	$-1.6\cdot10^{-19}$ Кл
Масса	$1.67\cdot10^{-27}$ Кг	$1.67\cdot10^{-27}$ Кг	$9.1\cdot10^{-31}$ Кг
Название \ Характеристика	Антипротон		Позитрон

Заряд	$-1.6\cdot10^{-19}$ Кл		$+1.6\cdot10^{-19}$ Кл
Масса	$1.67\cdot10^{-27\backslash}$ Кг		$9.1\cdot10^{-31}$ Кг

$$E=mc^2 \tag{8}$$

Для нас в этом курсе имеют значение только электроны и протоны. Теоретически возможно получить атомы, состоящий из отрицательно заряженных анти-ядер и позитронов, находящихся на квантовых орбитах вокруг них. Вещество, сделанное из таких атомов, носит название антивещества. Если атом, состоящий из протона и электрона, называется водородом, то описанный выше атом, состоящий из антипротона и позитрона, носит название антиводорода. Антиводород в малых количествах удается получить в ускорителях.

Закон сохранения электрического заряда (ЗСЭЗ) является таким же фундаментальным законом, как и закон сохранения импульса, момента импульса и энергии. Для иллюстрации данного свойства, рассмотрим ЗСЭЗ в химии и ядерной физики.

Чтобы лучше понять ЗСЭЗ полезно сформулировать принцип, который хотя не является законом, но все же является достоверным фактом о Вселенной. Этот принцип называется **принципом электронейтральности Вселенной**. Другими словами, *количество положительных и отрицательных зарядов в точности одинаково* (Рис. 5), (*9*) . Эта одинаковость является усредненной. Другими словами, в конкретных точках пространства могут преобладать электрические заряды одного либо другого знака (10).

Математически ЗСЭЗ можно записать как

$$\sum q_i^+ + \sum q_j^- = 0 \tag{9}$$

(глобально) или:

$$\sum q_k = const \tag{10}$$

(локально).

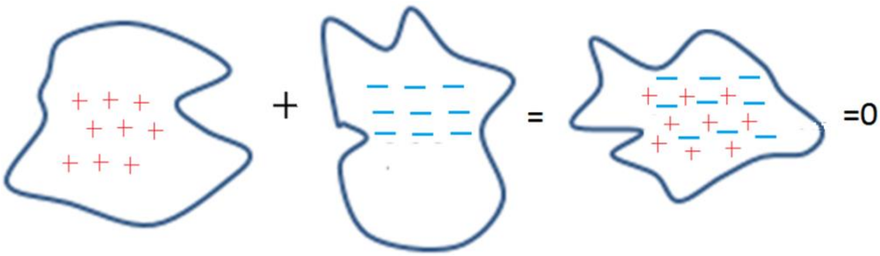


Рис. 5 – Свойство сохранения электрического заряда.

Пример ЗСЭЗ в химии

Рассмотрим растворение поваренной соли в воде:

$$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$$

В твердом состоянии кубическая подрешетка ионов натрия входит в кубическую подрешётку ионов хлора. При переходе в раствор ионы обоих знаков начинают двигаться хаотически, однако электронейтральность раствора в целом сохраняется в строгом соответствии с ЗСЭС.

Пример ЗСЭЗ в ядерной физике

Рассмотрим реакцию аннигиляции позитрона и электрона:

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\, h\nu, \qquad (11)$$

где h – постоянная Планка, ν – частота. (11) предлагает только один из возможных (но наиболее вероятных) каналов взаимоуничтожения электрон – позитронной пары, в результате которой получается пара виртуальных фотонов, способных дать рождения паре практически любых частиц, но чаще всего эти «любые» частицы оказываются реальными фотонами. Суммарный заряд частиц в левой части реакции равен нулю. Как известно, фотоны – беззарядовые частицы, поэтому суммарный заряд частиц в правой части так же равен нулю.

Попробуйте ответить на вопрос, почему поставлена цифра «два» для указания количества фотонов. Может ли возникнуть только один фотон

Что же касается третьего фундаментального свойства ЭЗ – инвариантности по отношению к преобразованиям Лоренца, то оно значит, что заряд при переходе к релятивистским скоростям не испытывает релятивистских поправок.

Электрическое поле

Закон Кулона имеет место за счет существования особой формы материи – электрического поля (ЭП), о котором в электростатике мы и знаем только потому, что с его помощью осуществляется взаимодействие между зарядами. Электрическое поле является векторной величиной и обычно обозначается латинской буквой $\vec{E}$. Размерностью электрического поля является в системе СИ является вольт на метр (В/м). Для случая неподвижных зарядов ЭП так же иногда называют «электростатическим полем».

Таким образом, можно сформулировать следующие важнейшие свойства ЭП:

1) Подчиняется принципу суперпозиции.
2) Действует на заряды в соответствии с законом Кулона.

Принцип суперпозиции полей

Суммарное поле, складывающееся из отдельных полей, вычисляется как векторная сумма каждого из полей в отдельности:

$$\vec{E}_{\Sigma} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_1^n E_i \quad, \tag{12}$$

где E_i, - поля, создаваемые каждым из зарядов системы, состоящей из n зарядов, в отдельности, что графически показано для системы, состоящей из двух зарядов, на Рис. 6.

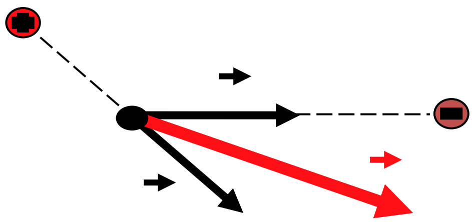


Рис. 6. Принцип суперпозиции полей.

Действие поля на заряды

Полагая, что сила взаимодействия зарядов пропорциональна напряженности ЭП, можно записать:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q \tag{13}$$

Переписывая данную формулу через закон Кулона, можно определить напряженность поля как

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad , \tag{14}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор, соединяющий заряды, $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ – единичный вектор, определяющий направление от заряда q на q', Отметим, что часто $1/4\pi\varepsilon_0$ обозначают через k, чье значение округленно можно принять равным $9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Таким образом, напряженность является силовой характеристикой ЭП, обратно пропорциональной квадрату расстояния (Рис. 7). В любой точке пространства ЭП направлено по лучу, соединяющему эту точку пространства с зарядом. Направление вектора напряженности ЭП считают совпадающим с направлением движения пробного положительного заряда, помещенного в точку, где есть ЭП.

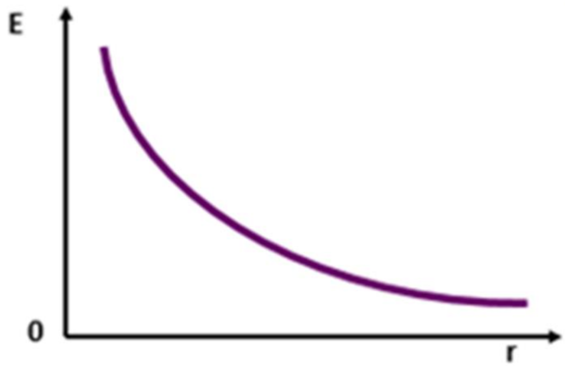


Рис. 7 – Зависимость напряженности от расстояния.

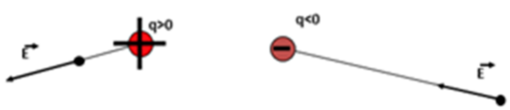


Рис. 8 – Графическое изображение вектора напряженности электрического поля, создаваемого положительным и отрицательным зарядами.

Консервативность электрического поля

В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле, характеризуемое вектором напряженности. Покажем, что силы ЭП консервативны, а само поле потенциально.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила $\vec{F}$, которую можно представить как

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = F(r)\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (15)$$

где $F(r)$ – модуль силы.

Для того, чтобы доказать, что ЭП потенциально, нужно доказать, что силы ЭП поля консервативны.

Из курса механики известно, что любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек. ЭП является центральным, следовательно, оно консервативно. Подтвердим это расчетами. Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом q по перемещению заряда q' из точки 1 в точку 2 (Рис. 9). Перемещение по траектории ($d\boldsymbol{l}$) можно разложить на две составляющие: по прямой, соединяющей заряды ($d\boldsymbol{l}_{||}$), и перпендикулярно ей ($d\boldsymbol{l}_{\perp}$). Работа dA будет равна:

$$dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \mathbf{F}\cdot(d\boldsymbol{l}_{||} + d\boldsymbol{l}_{\perp}) \qquad (16)$$

Учитывая, что $\boldsymbol{l}_{||}||\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}_{||} = Fdl_{||}cos0^{\circ} = Fdr,$

где

$$r = |\vec{r}|$$

и

$$\boldsymbol{l}_{\perp} \perp \boldsymbol{r} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{l}_{\perp} = F dl_{\perp} cos 90^{\circ} = 0$$

Таким образом:

$$\mathrm{d}A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \qquad (17)$$

И полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{r})\Big|_{r_2}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \qquad (18)$$

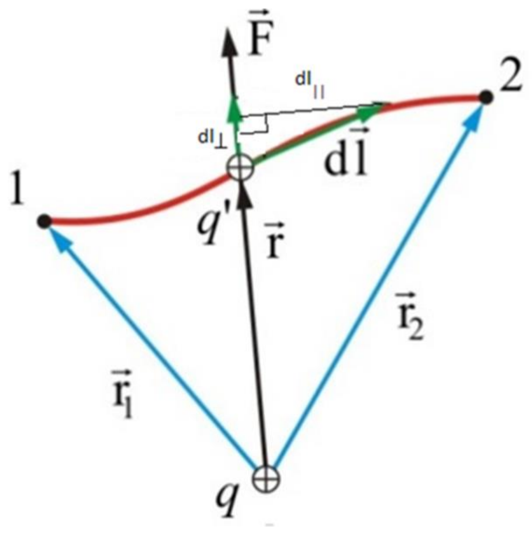


Рис. 9. Иллюстрация к доказательству консервативности электрического поля.

Из этого уравнения видно, что работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только от координат начальной и конечной точек перемещения, что подтверждает, что силы поля консервативны, а само поле – потенциально.

Пример. Вычисление работы по перемещению заряда

Определим работу по перемещению заряда для следующего случая: заряд 1нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 0,1м от поверхности металлической сферы радиусом 0,1м, заряженной с поверхностной плотностью 10^{-5} Кл/м^2.

На заряд со стороны электростатического поля действует сила. Поэтому при перемещении заряда в электростатическом поле совершается работа.

Электрическое поле является потенциальным. Это значит, что работа по перемещению заряда не зависит от пути, по которому перемещается заряд, а зависит только от начального и конечного положения заряда.

Работа может быть представлена через разность потенциальных энергий частицы в электрическом поле:

$$A_{поля} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$[A_{поля}] = Дж;$$

Площадь плоскости бесконечна и также бесконечен заряд, находящийся на плоскости. Поверхностной плотностью заряда σ называется отношение заряда плоскости Q к ее площади S.

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$[\sigma] = \frac{Кл}{м^2}$$

Поверхностная плотность заряда – конечная величина, характеризующая степень заряженности бесконечной плоскости.

Вычисления:

Дано:

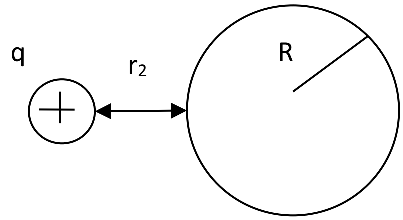
$q = 10^{-9}\, Кл$

$R = 0{,}1 м$

$\sigma = 10^{-5}\, Кл/м^2$

$r_2 = 0{,}1 м$

$r_1 = \infty$



Решение:

$$A = W_2 - W_1;$$

$$W = \varphi \cdot q; \quad \varphi_1 = 0$$

$$A = q(\varphi_2 - \varphi_1) = q\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r+R};$$

$$Q = \sigma \cdot S = 4\pi R^2 \cdot \sigma;$$

$$A = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r+R)} = \frac{R^2 \cdot \sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 (r+R)};$$

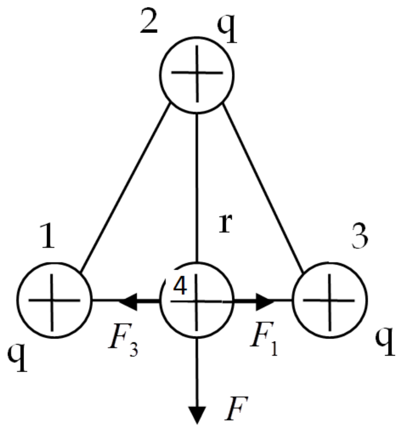
$$A = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} = 56497\, Дж.$$

Ответ: $A = 56497\, Дж$

Пример решения задачи

Заряды по 1нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2м. Равнодействующая сил, действующих на четвертый заряд, помещенный на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6мкН. Определить этот заряд и напряженность поля в точке его расположения.

Дано: $q = 1нКл$
$a = 0{,}2м$
$F = 0{,}6мкН$



Решение:

Из рисунка видно, что равнодействующая зарядов (1) и (3) на четвертый заряд равна нулю. Следовательно сила, действующая на этот заряд, определяется действием заряда (1) и может быть найдена по закону Кулона, расстояние между зарядами находим из прямоугольного треугольника.

$$F = \frac{q \cdot q_0}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2};$$

$$r = a \cdot \cos\frac{\pi}{6};$$

Обозначая пробный заряд через q_0 вычисляем его значение и проверяем размерность.

$$F = \frac{q \cdot q_0 \cdot 4}{4\pi \cdot \varepsilon_0 a^2 \cdot 3} = \frac{q \cdot q_0}{3\pi \cdot \varepsilon_0 a^2};$$

$$q_0 = \frac{3\pi \cdot \varepsilon_0 a^2 \cdot F}{q};$$

$$q_0 = \frac{Кл^2 \cdot м^2 \cdot Н}{Н \cdot м^2 \cdot Кл} = Кл;$$

$$q_0 = \frac{3\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}04 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{10^{-9}} = 2 \cdot 10^{-9}\, Кл;$$

По соотношению между зарядом и силой находим напряженность.

$$E = \frac{F}{q_0};$$

$$E = \frac{Н}{Кл}$$

$$E = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-9}} = 300\, Н/Кл;$$

Ответ:

$q_0 = 2 \cdot 10^{-9}\, Кл; E = 300\, Н/Кл$

Потенциал

Можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – потенциальную энергию. Если центральных сил несколько, то исходя из принципа суперпозиции сил,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{19}$$

где n общее чисто сил, i индекс суммирования. Можно показать, что общая работа A, равная разности потенциальных энергий (20)

$$A_{12} = W_2 - W_1 \tag{20}$$

будет равна сумме работ, совершаемой каждой силой в отдельности (21). Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \ . \tag{21}$$

Можно подсчитать работу, совершаемую при изменении расстояния между зарядами от r_2 до r_1 (Рис. 9). Поскольку выше показано, что силы электрического поля консервативны, а само поле потенциально, то такая работа не зависит от формы траектории, а только от расстояния между зарядами.

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} \tag{22}$$

Где q и q' рассматриваемые заряды. Таким образом:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{23}$$

Если заряды сближаются до расстояния r_1 из бесконечности (Рис. 10), то работа будет равной

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\Bigg|_{r_2=\infty} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} \tag{24}$$

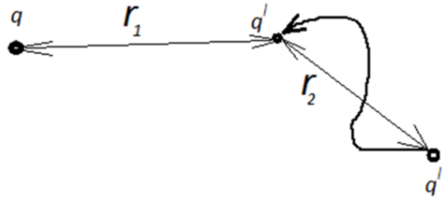


Рис. 10. К подсчету энергии системы зарядов.

Вспоминая, что работа равна изменению потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком и обозначая расстояние между зарядами через r получим

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} \quad , \tag{25}$$

где $r = r_2 - r_1$. При этом необходимо учитывать знак зарядов. Отметим сходство этой формулы с формулой энергии гравитационного взаимодействия. Отсутствие знака минус происходит от необходимости учитывать два знака зарядов. В случае гравитационного взаимодействия массы всегда притягиваются. Массы не бывают разных знаков. В случае взаимодействия одноименных зарядов, энергия системы будет отрицательной, и наоборот.

Разностью потенциалов *назовем величину, равную отношению работы по перемещению заряда между точками 1 и 2 к величине этого заряда.*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{12} = \frac{W_{12}}{q} \tag{26}$$

Видно, что физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю. Когда говорят «потенциал некоторой точки» – имеют в виду разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность.

Таким образом **потенциал точки пространства, созданный электрическим полем,** *численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность* (или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля).

Потенциал является скалярной величиной, что делает его удобным для вычисления напряженности ЭП.

Поскольку ЭП подчиняется принципу суперпозиции, то потенциал обладает свойством аддитивности. Потенциал в точке, созданный системой зарядов, равен сумме потенциалов, созданных каждым из зарядов.

$$\varphi_{\Sigma} = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_1^n \varphi_i \qquad (27)$$

Размерностью потенциала является «вольт» (В).

Энергия системы зарядов

Величина, определенная в (25) определяет энергию системы, состоящей из двух зарядов. Обобщая на систему, состоящую из нескольких зарядов, сформулируем: **энергия системы зарядов** *равна работе, которую нужно совершить для того, чтобы сблизить заряды на данное расстояние из бесконечности*.

Вычисленная таким образом работа и называется энергией системы зарядов. Заметим, что энергия системы одноименных зарядов отрицательная (заряды стремятся разлететься), а разноименных – положительная (притянуться).

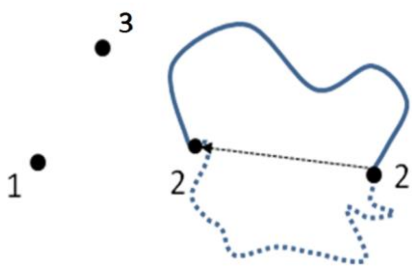


Рис. 11. К нахождению энергии системы зарядов.

Можно аналогично провести вычисление энергии системы, состоящей из трех зарядов:

$$U = k\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \tag{28}$$

Обобщая на неограниченное число зарядов:

$$U = \frac{1}{2} kN \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} \tag{29}$$

Где N число атомов. Для исключения суммирования пары дважды, в этой формуле применен коэффициент ½.

Пример. Вычисление энергии кристаллической решетки

Выведем формулу подсчета энергии связи атомов кристаллической решети, образующей объемную гранецентрированную структуру, например поваренной соли (NaCl) (Рис. 12).

В основе энергии связи лежит электростатическое взаимодействие, следовательно можно применить знания, полученные при вычислении энергии связи электрических зарядов, для вычисления внутренней энергии связи кристаллической решетки.

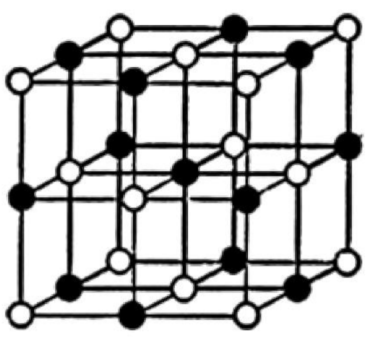


Рис. 12. Объемная гранецентрированной решетка,

состоящая из атомов двух сортов.

В объемной гранецентрированной решетке, кубическая подрешетка атомов одного вида (натрия) находится в подрешетке атомов другого вида (хлора. Для подсчета, учтем взаимодействие только ближайших атомов и просуммируем по их числу с использованием (29). Суммируя по ближайшим соседям с учетом количества одинаковых пар, получаем.

$$U = \frac{1}{2} N \left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \cdots \right] \qquad (30)$$

Первое слагаемое появляется от шести ближайших ионов натрия, расположенных на расстоянии a, второй от двенадцати ионов хлора, расположенным по углам куба, и т.д.

Чем большее количество пар взаимодействие учитывать, тем точнее получается результат. В первом приближении его можно оставить в записанном виде.

Подсчет дает ответ: $U = -\frac{0{,}8738Ne^2}{a}$ (31)

Где a – кратчайшее расстояние между атомами одного вида, N число атомов на единицу объема, учитывая, что число атомов вдвое превышает число молекул.

Определение энергии связи кристалла поваренной соли экспериментальными методами дает значение, близкое к теоретическому, что свидетельствует о правильности примененного подхода.

Связь потенциала и напряженности электрического поля.

Рассмотрим его связь с напряженностью электрического поля ***E*.**
Запишем выражение для работы, совершаемой ЭП при переносе заряда:

$$\mathrm{d}A = q\overline{E} \cdot d\bar{l} \tag{32}$$

И найдем отношение этой работы к заряду

$$dA / q = d\varphi = q\overline{E} \cdot d\bar{l} / q = \overline{E} \cdot d\bar{l} \tag{33}$$

Таким образом:

$$d\varphi = \overline{E} \cdot d\bar{l} \tag{34}$$

Если разность потенциалов создается напряжением *U*, прикладываемым между пластинами, находящимися на расстоянии *l*,в области однородности справедливо:

Теперь понятно, почему размерностью напряженности ЭП является В/м. Из (34) следует:

$$d\varphi = E_x dx + E_y dy + E_z dz \tag{35}$$

Разделяя данное выражение в проекциях на Декартовы оси получаем:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \tag{36}$$

$$E_y = -\frac{d\varphi}{dy} \tag{37}$$

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz} \tag{38}$$

Учитывая, что

$$\vec{E} = \vec{\imath} E_x + \vec{\jmath} E_y + \vec{k} E_z \tag{39}$$

где ***i, j, k*** – орты, можно «собрать» $\vec{E}$ через его проекции на оси Декартовой координатной системы, используя оператор Гамильтона «набла» ($\vec{\nabla}$):

$$\vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{d}{dx} + \vec{\jmath}\frac{d}{dy} + \vec{k}\frac{d}{dz} \tag{40}$$

Данный оператор удобен тем, что будучи формально подставляем в разные математические формулы в виде либо векторного либо скалярного произведения, он дает математически корректные с точки зрения векторного анализа выражения. Хотя оператор набла и является дифференциальным оператором,   им можно алгебраически оперировать как с обычным вектором.

Подставляя (36 - 38) в (39) в   можно записать:

$$\vec{E} = -\left(\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}\right) =$$

$$= -\left(\vec{i}\,\frac{d}{dx} + \vec{j}\,\frac{d}{dy} + \vec{k}\,\frac{d}{dz}\right)\varphi \tag{41}$$

В применении к скаляру оператор Гамильтона называется градиентом, что в буквальном переводе с английского означает «изменение» (*grad*). Таким образом

$$\vec{E} = -grad\varphi \tag{42}$$

или

$$\vec{E}=\text{-}\vec{\nabla}\varphi \tag{43}$$

Заметим, что потенциал содержит всю информацию об электрическом поле, являясь при этом скалярной величиной в отличие от векторной – напряженности ЭП, что в ряде случаев делает его более удобной характеристикой ЭП, чем напряженность.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для решения практических задач бывает удобно изображать ЭП с помощью так называемых «силовых линий» и «эквипотенциальных поверхностей».

СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ЭП

Линии напряженности (или силовые линии электрического поля) – *это непрерывные линии, касательные к которым в каждой точке, через которую они проходят, совпадают с векторами напряженности.*

Пример силовых линий ЭП для зарядов различных конфигураций показан на Рис. 13. Как видно, силовые линии вблизи точечного заряда всегда расходятся радиально от точки, в которой находится заряд (Рис. 13 (А, Д, Б, Е)). Это и понятно: при $r \to 0$ в формуле (14) $E \to \infty$, следовательно влиянием других источников ЭП вблизи заряда можно пренебречь. При достаточном удалении от заряда линия ЭП может быть искривленной (Рис. 13 (В)).

Для случая двух разноименно заряженных плоскостей, применяя принцип суперпозиции, получаем картину, из которой видно, что на достаточном удалении от краев линии напряжённости параллельны, Рис. 13 (Г). Для построения картинки линий, создаваемых зарядом и проводящей плоскости применяем так называемый **принцип отражения,** заключающийся в том, что *заряд, находящийся вблизи бесконечной проводящей плоскости*

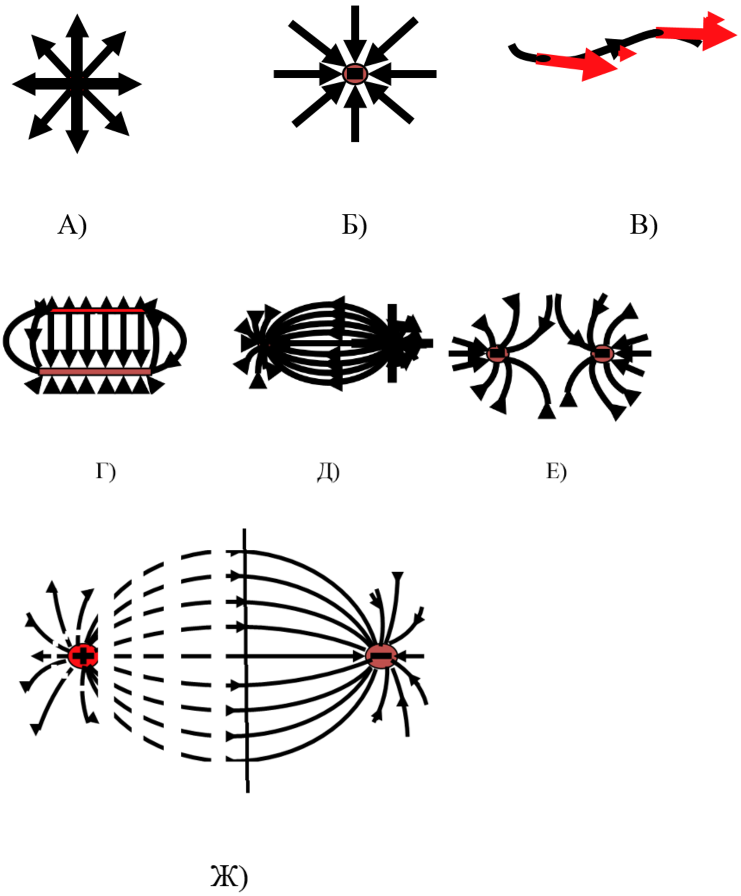


Рис. 13 – Линии напряженности ЭП для случаев:
А) точечного положительного заряда, Б) точечного отрицательного заряда
В) произвольной системы зарядов, Г) двух разноименно заряженных плоскостей, Д) системы, состоящей из двух разноименных зарядов
Е) системы, состоящей из двух одноименных зарядов
Ж) системы, состоящей из заряда и проводящей плоскости.

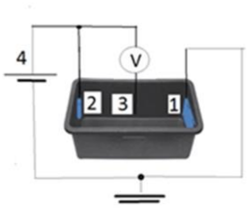
взаимодействует с плоскостью так же, как если бы по другую сторону плоскости поместили заряд равный по величине, но противоположный по знаку (Рис. 13 (Ж)). Таким образом, силовые линии ЭП всегда начинаются на положительном, а заканчиваются на отрицательном заряде.

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Для графического отображения потенциала служат «эквипотенциальные поверхности» (ЭквП) -- поверхности, соединяющие точки, с одинаковым потенциалом.

Рассмотрим пример построения ЭквП для случая двух проводников, находящихся под разным потенциалом: металлической пластины (1) и стержня (2). Такую систему можно собрать следующим образом. Возьмем прямоугольную кювету, заполненную электропроводящим раствором, например однопроцентным раствором поваренной соли (Рис. 14). Расположим параллельно одной из сторон пластину (1), а с противоположной стороны поместим расположенный вертикально отрезок проволоки (2). Батарея (4) создает между (1) и (2) разность потенциалов. Разность потенциалов между зондом (3) и электродом (2) снимает вольтметр V.

Для построения эквипотенциальных поверхностей достаточно нанести эпюру точек, лежащих под одинаковым потенциалом, внутри прямоугольника со сторонами, соответствующими границам кюветы. В этом случае эквипотенциальные поверхности будут выглядеть как линии, поскольку случай двухмерный.



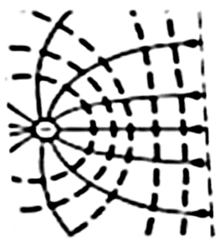


Рис. 14. Кювета для графического определения потенциала.

Рис. 15. Пример ЭквП для случая, показанного рисунком выше. ЭквП даны пунктиром.

При анализе полученной картины можно заметить, что потенциал точек, близких к плоской металлической пластине примерно одинаков, незначительно отличаясь в сторону уменьшения. Следовательно, *потенциал всех точек проводника можно считать одинаковым*. Речь здесь идет, естественно, только о «хорошем» проводнике, например о медном. В случае образца с меньшей удельной электропроводностью, например пластмассе, смешанной с частичками углерода, потенциал в его различных-точках уже не будет одинаков.

Нетрудно заметить, *ЭквП и силовые линии ЭП всегда перпендикулярны*, что так же вытекает из (42).

Поляризация диэлектрика

Электрический диполь

Для нас имеет особое значение случай двух разных по знаку, но одинаковых по модулю электрических зарядов, изображенный на Рис. 13 (Д). Такая система называется электрическим диполем. Поговорим о ней более подробно.

Электрическим диполем *называется система, состоящая из двух равных по модулю разноименных точечных зарядов.*

Плечом диполя *(l_0) называется отрезок, соединяющий отрицательный заряд с положительным.*

Дипольным моментом ($\boldsymbol{p}$) *называется вектор, равный произведению плеча диполя на модуль заряда, и направленный от отрицательного заряда к положительному [Кл м].*

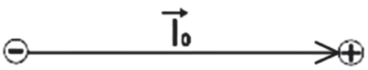


Рис. 16. Электрический диполь.

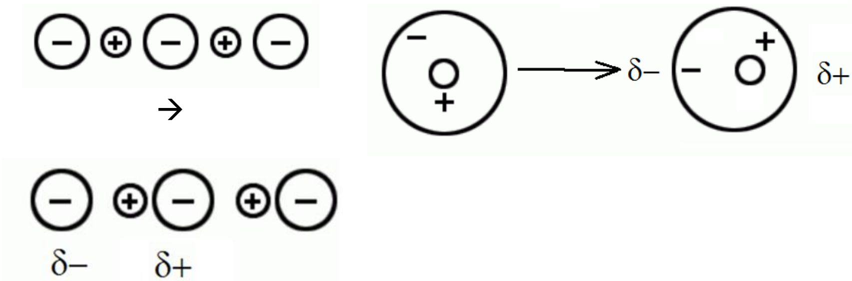
$$\vec{p} = q\vec{l}_0 \tag{44}$$

Понятие диполя имеет большое практическое значение потому, что при определенных условиях многие электрически нейтральный молекулы способны приобретать свойства диполя [1-3]. *Явление приобретения веществом дипольного момента под действием внешнего электрического поля называется* ***поляризацией*** и подробно рассматривается в разделе физики конденсированного состояния. Детальное описывает поляризацию теория Дэбая [4, 5].

Петр Дэбай (Peter Debye), основоположник теории диэлектрической поляризации.

Упрощенно механизм поляризации можно представить следующим образом. Всякое вещество имеет в своем строении равное количество положительных и отрицательны зарядом. Примером может служить кристалл поваренной соли, имеющий ионное строение ($Na^{+}Cl^{-}$). Другим примером является атом водорода, в котором вокруг точечного положительно заряженного ядра сферически симметрично распределена отрицательно заряженная электронная плотность.

При внесении вещества в электрическое поле, заряды незначительно смещаются относительно своего положения равновесия, формируя структуру, состоящую из электрических диполей (Рис. 17).



Ионный (полярный) диэлектрик — Неполярный диэлектрик

А — Б

Рис. 17. Примеры поляризации диэлектриков при внесении во внешнее электрическое поле.

Поляризация молекул вещества под действием электрического поля, заключающаяся в возникновении в веществе диполей, приводит к ослаблению электрического поля внутри вещества. Количественно такого рода ослабление можно охарактеризовать с помощью так называемой «диэлектрической проницаемости».

Диэлектрической проницаемостью называется *отношение напряженности электрического поля в вакууме к таковой в веществе ($E_{вак}/E_{в\text{-}ва}$).*

Соответственно, ε вакуума равна единице. Поскольку подавляющее большинство веществ ослабляют электрическое поле, то в них ε больше единицы (Табл. 2).

Табл. 2. Значения диэлектрической проницаемости некоторых веществ.

Вещество	**ε**
Вакуум	1
Воздух (н.у.)	≈1
Вода	81
Пластмассы	3– 7

Пример. Вычисление потенциала, создаваемого электрическим диполем

Вспомним, что диполь является системой, состоящей из двух разноименных точечных зарядов (Рис. 18).

$$\varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_- r_+} \ (r_- - r_+)$$

При выполнении условия $r >> l_0$

на достаточном расстоянии от диполя можно считать

$$r_+ r_- \approx r^2;$$

и

$$|r_- - r_+| = l_0 \cos\theta$$

(Рис. 18).

Тогда:

$$\varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \quad l_0 \cos\theta$$

Или с учетом (44) в точках, расположенных достаточно далеко от диполя, потенциал диполя равен

$$\varphi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \tag{45}$$

Что удобно переписать через скалярное произведение как

$$\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} \tag{46}$$

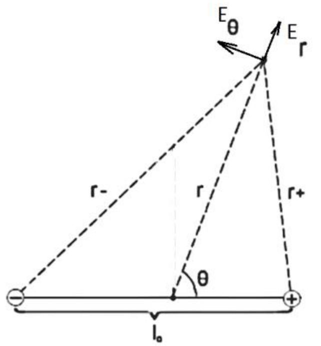


Рис. 18. К вычислению потенциала диполя.

Пример. Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого диполем

Для того, чтобы вычислить напряженность электрического поля, создаваемого диполем, воспользуемся соотношением (42) применив его к (45). При этом будем учитывать, два заряда, составляющие диполь, и точка пространства, в которой вычисляем напряженность, образуют плоскость. (Три точки всегда задают плоскость). Следовательно можно решать задачу в полярных координатах, проводя дифференцирование по расстоянию и углу пользуясь математическими правилами, существующими для этого.

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$$

Отметим, что компонента E_θ направлена перпендикулярно E_r (Рис. 18). Тогда модуль напряженности равен:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3cos^2\theta}$$

Из полученных формул видно, что на продольной оси диполя

$$\theta = 0,\ E_z = 0,\ E = E_r = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

а на перпендикулярной оси

$$\theta = \pi/2,\ E_r = 0,\ E = E_\theta = p/4\pi\varepsilon_0 r^3$$

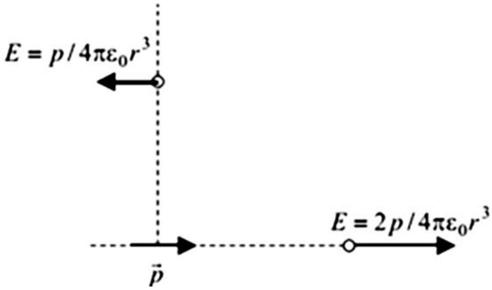


Рис. 19. К вычислению напряженности электрического поля диполя.

Вычисление силы, действующей на диполь в электрическом поле

Рассмотрим два случая.

Случай однородного поля

Если электрическое поле однородно, то на положительный и отрицательный заряд будут действовать одинаковые силы. В случае, когда направление поля параллельно дипольному моменту, силы полностью компенсируют друг друга и с диполем ничего не происходит (Рис. 20).

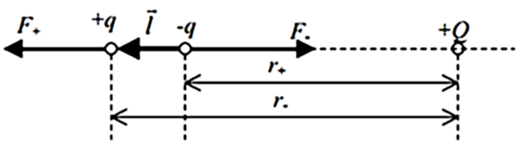


Рис. 20. Диполь в однородном электрическом поле, направление которого параллельно дипольному моменту.

Если дипольный момент не параллелен полю, то на диполь будет действовать вращающий момент, стремящийся развернуть его в направлении поля. Этот вращающий момент будет равен произведению дипольного момента на напряженность электрического поля.

$$\vec{N} = [\vec{l}q\vec{E}] = [\vec{p}\vec{E}]$$

Случай неоднородного поля

Если поле неоднородно, то, как и в предыдущем случае, будет присутствовать сила, стремящаяся развернуть дипольный момент по направлению поля. В случае, когда диполь уже развернут, а поле существенно неоднородно на расстояниях, сравнимых с плечом диполя, на отрицательный и положительный заряд будут действовать разные силы, результирующая которых будет направлена в сторону усиления поля. Для определенности будем считать, что поле создано точечным положительным зарядом. Рассчитаем величину этой силы исходя из закона Кулона.

$$F = F_1 + F_2 = \frac{(-q)Q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2} + \frac{(+q)Q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}$$

Где r_- и r_+ расстояния от пробного заряда Q до зарядов (-q) и (+q). Вынося общий множитель за скобки и используя формулу разности квадратов:

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{r_+^2}\right) = \frac{qQ(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2 r_+^2}$$

Далее учитываем, что

$$|r_+ - r_-| = l, r_+ + r_- = 2r,$$

Где r – среднее арифметическое расстояние от диполя до пробного заряда.

$$r = \frac{r_+ + r_-}{2}$$

Тогда с учетом (44):

$$F = \frac{2Qlqr}{4\pi\varepsilon_0 r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pQ}{r^3}$$

Это сила, с которой диполь втягивается в область более сильного поля. Теперь становится понятным объяснение опыта с кусочками бумаги, притягивающимися к наэлектризованной палочке, обсуждаемом в начале данного пособия.

Кусочки бумаги являются диэлектриком, поляризующимся в области неоднородного поля, создаваемого палочкой. Поэтому они и притягиваются к палочке, втягиваясь в область более сильного поля. Отметим, что в электрическом поле поляризуются не только диэлектрики, но и проводники, которые так же будут втягиваться в область более сильного электрического поля.

Вооружившись знаниями о поведении диполя в неоднородном ЭП, теперь мы можем попытаться объяснить принцип действия электрофорной машины (ЭМ), что не так просто, как кажется на первый взгляд. Итак, при вращении дисков во взаимно обратных направлениях в какой-то момент возникает случайный диполь, один из зарядов которого снимается со стороны случайно оказавшейся положительной, а другой – отрицательной обкладки. Диполь вызывает неоднородное электрическое поле, заставляющее втягиваться в него другие диполи. В силу симметричного характера конструкции ЭФ, это опять-таки диполи, возникающие на разных обкладках. Заряды продолжают течь на Лейденские банки, на которых накапливаются все увеличивающиеся заряды до того момента, как значение зарядов становится настолько большим, что вызывает поверхностные токи по диэлектрику и пробой воздуха, что и демонтируется весьма красочно в опытах по физике.

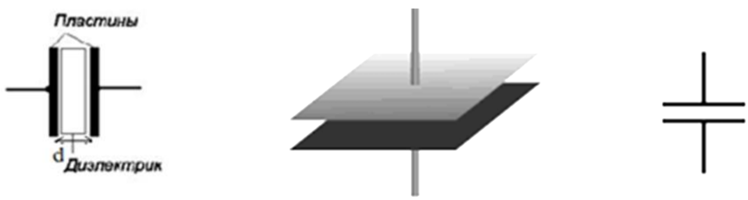
Конденсатор

Было бы неполным обсуждая законы электростатики упустить важный пример практического применения электрического поля в устройстве, способном его накапливать, называемым «конденсатором».

***Конденсатором** называется двухполюсник, представляющий собой два проводника, разделенные диэлектриком.* Такое устройство, способно накапливать энергию в виде электрического поля. Основной характеристикой конденсатора является емкость, являющаяся отношением заряда к потенциалу на обкладках.

$$C = Q/U \qquad (47)$$

На Рис. 21 показана конструкция элементарного конденсатора и обозначение его на схеме. Конструкция конденсаторов не ограничивается плоскопараллельными пластинами. Промышленность выпускает многообразие конденсаторов, различающихся как по способу накопления заряда, так и по конструкции (Рис. 22).



А) Б) С)

Рис. 21. Устройство плоского конденсатора (А, Б) и обозначение его на схеме (С).

Рис. 22. Элементное исполнение различных конденсаторов.

Электрическая емкость

Подсчитаем заряд, накапливаемый на обкладках конденсатора.

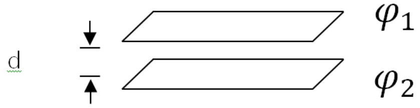


Рис. 23. К подсчету заряда на конденсаторе.

По определению напряжённости поля через разность потенциалов:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d};\ [E] = \frac{В}{М} \qquad (48)$$

Немного позже (стр.73) мы вычислим напряженность поля, создаваемое заряженной плоскостью. Пока воспользуемся этим результатом без вывода:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (49)$$

В конденсаторе 2 обкладки, поэтому напряженность поля между ними будет в два раза больше. Выразим плотность зарядов через разность потенциалов и расстояние между обкладками:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 2\varepsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \qquad (50)$$

Помножим полученный результат на площадь обкладок конденсатора S, принимая во внимание, что

$$Q = \sigma\, S\,.$$

Тогда получаем:

$$Q = \Delta\varphi \underbrace{\frac{S\varepsilon o \varepsilon}{d}}_{C} = C(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (51)$$

Величину, являющуюся характеристикой геометрических размеров конденсатора, и не зависящую ни от приложенного потенциала ни от напряженности поля, называют ***емкостью*** и обозначают *C*.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \tag{52}$$

где ε_0 - электрическая постоянная, S – площадь конденсатора, d – расстояние между пластинами, ε – диэлектрическая проницаемость.

Заметим, что в СГС размерностью емкости является см. В инженерной системе СИ ёмкость измеряют в фарадах *(Ф)*.

$$1\text{Ф} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{В}} = \frac{1\ a \cdot c}{1\text{В}}$$

Энергия конденсатора

Энергию заряженного конденсатора можно вычислить путем вычисления энергии, которую необходимо затратить для переноса элементарного заряда с одной обкладки на другую. Для этого умножим силу, действующую на заряд (*F*), на расстояние между обкладками (*l)*

$$A = F \cdot l = E \cdot q \cdot l = \varphi \cdot q \tag{53}$$

$$dW = \varphi_{12} dq = \frac{q}{c} dq = \frac{qdq}{c} \tag{54}$$

Где φ_{12} – разность потенциалов между обкладками.
Далее интегрируем

$$W = \frac{1}{c} \int qdq = \frac{q^2}{2c} \tag{55}$$

В результате можно получить несколько формул для энергии конденсатора, воспользовавшись соотношениями (47) и (55):

$$W = \frac{1}{2} Uq = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} \tag{56}$$

Вычисление плотности энергии электрического поля

Для вычисления плотности энергии ЭП проще всего подсчитать энергию плоского конденсатора, взяв за основу (56) и подставив туда (47) и (51),

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\right)(Ed)^2 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} S \cdot d = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2 \cdot V}{2}, \qquad (57)$$

после чего найти плотность, разделив на объем между обкладками (V).

$$\omega_E = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

Проинтегрировав по плотности несложно вычислить энергию, заключенную в электрическом поле произвольной формы.

$$W = \int \omega_E dV = \int \varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{2} E^2(V) dV \qquad (58)$$

Хотя в инженерных приложениях применяется система СИ, представляет интерес так же сформулировать данную формулу так же в системе СГС в том виде, в котором она приводится в большинстве учебников по физике:

$$W = \int \frac{1}{8\pi} E^2(V) dV \qquad (59)$$

Таким образом, видим, что плотность энергии пропорциональна квадрату напряженности электрического поля.

Примеры решения задач

Задача 1

Определить потенциал поля (стр. 26) в точке расположения заряда 4.

Решение:

Потенциал является энергетической характеристикой электрического поля. Он обладает свойством аддитивности, поэтому потенциал поля в точке (4) будет равен алгебраической сумме потенциалов от остальных зарядов. Для его нахождения воспользуемся принципом суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

учитывая, что потенциалы от (1) и (3) зарядов одинаковы и применяя формулу:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = \frac{kq}{r},$$

приходим к:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(2 \cdot \frac{1}{a/2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a}\left(4 + \frac{1}{\cos 30^\circ}\right);$$

$$\varphi = \frac{Кл \cdot м^2 \cdot Н}{Кл^2 \cdot м} = В;$$

$$\varphi = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \cdot \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 232 В.$$

Учитывая, что все заряды положительные, в данной задаче потенциалы складывались.

Ответ: φ = 232 В.

Задача 2

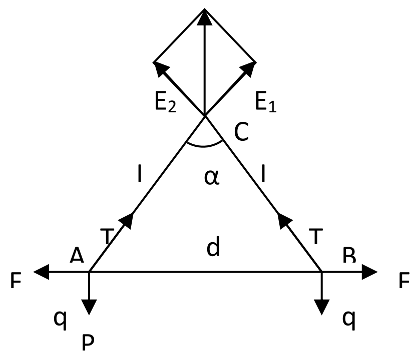
Два шарика массой по 0,2г подвешены в общей точке на нитях длиной 0,5м. Шарикам сообщили заряд и нити разошлись на угол 90° . Определить напряженность и потенциал поля в точке подвеса шариков.

Дано:

$m = m_1 = m_2 = 0{,}2 г$

$l = 0{,}5 м$

$\alpha = 90^\circ$



Решение:

Запишем условие баланса сил в равновесии:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{кл} + \vec{T} = 0$$

Спроецируем векторное уравнение баланса сил на оси координат:

$$Ox: F_{кл} = T \sin\alpha$$
$$Oy: mg = T \cos\alpha$$

Расстояние между шариками найдем по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{2}l$$

Поскольку шарики одинаковые и имеют одинаковый заряд, можно рассмотреть один из них. Силы, действующие на шарик:

$$T\sin 45^0 = P$$
$$T\cos 45^0 = F_{кл}$$

Из этого следует:

$$|F_{кл}| = |P|$$

Подставляя формулы для закона Кулона и веса, с учетом равенства зарядов, получаем:

$$k\frac{q^2}{\varepsilon d^2} = mg \Rightarrow q = \sqrt{2l^2 mg/k}$$

Из равенства зарядов и расстояний до точки подвеса имеем, что напряженности электрического поля, созданные этими шариками в точке подвеса, равны по модулю:

$$|E_{AC}| = |E_{BC}| = k\frac{q}{l^2}$$

Суммарная напряженность в точке подвеса равна:

$$E_C = \sqrt{E_{AC}^2 + E_{BC}^2} = \sqrt{2}|E_{AC}| = k\frac{\sqrt{2}q}{l^2} = \frac{2\sqrt{kmg}}{l}$$

$$E_C = \frac{2\sqrt{9*10^9 * 2*10^{-6} *9.8}}{0.5} = 1.68 кВ / м$$

Из тех же самых соображений, потенциалы электрического поля, созданные этими шариками в точке подвеса, так же равны по модулю:

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC} = k\frac{q}{l}$$

Суммарный потенциал в точке подвеса равен:

$$\varphi_C = \varphi_{AC} + \varphi_{BC} = \frac{2kq}{l} = 2\sqrt{2kmg}$$

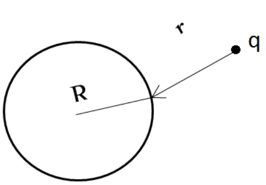
$$\varphi_C = 2\sqrt{2*9*10^9 * 2*10^{-6} *9.8} = 1.188 кВ$$

Ответ: E_C = 1.68 кВ/м; φ_C = 1.188 кВ.

Задача 3

Заряд 1 нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 0,1 м от поверхности металлической сферы радиусом 0,1 м, заряженной с поверхностной плотностью 10^{-5} Кл/м^2. Определить работу перемещения заряда.

Дано:



q = 1нКл = 1 · 10^{-9} Кл;

r = 0,1 м;

R = 0,1;

$\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2;

Решение:

Разность потенциалов между начальной и конечной точкой перемещения заряда равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}.$$

Потенциал точки, которая находится в бесконечности равен нулю, φ_1 = 0. φ_2 – потенциал поля в точке на расстоянии (R + r) от центра сферы. Определим его:

$$\varphi_2 = \frac{k \cdot q_0}{(R+r)},$$

где: k = 9·10^9 Н $\cdot$ м^2/Кл^2. q_0 – заряд на поверхности сферы. Заряд на поверхности сферы определим, зная поверхностную плотность.

$$\sigma = \frac{q_0}{S}, \sigma = \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot R^2}, q_0 = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma.$$

Определим работу перемещения заряда:

$$A = (\varphi_1 - \frac{k \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma}{(R+r)}) \cdot q.$$

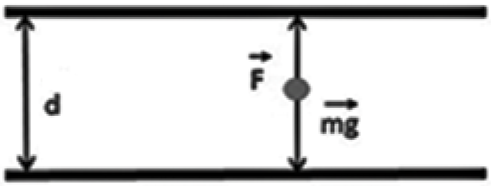
$|A|$ = 5,652$\cdot 10^{-5}$Дж. Знак работы зависит от знаков зарядов. При одноименных знаках работа выполняется против сил поля, работа отрицательная. При разноименных знаках работа положительная (поле выполняет работу).

Ответ: 5,652$\cdot 10^{-5}$Дж.

Задача 4

Пылинка массой $8 \cdot 10^{-15}$ кг удерживается в равновесии между горизонтально расположенными обкладками плоского конденсатора. Разность потенциалов между обкладками 490 В, а зазор между ними 1 см. Определить, во сколько раз заряд пылинки больше элементарного заряда.

Дано:



$m = 8 \cdot 10^{-15}$ кг;

$g = 9{,}81$ м/с^2;

$U = 490$ В;

$d = 1$ см $= 0{,}01$ м;

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Найти:

n-?

Решение:

В проекции на вертикальную ось, баланс сил, действующих на пылинку:

$$F = mg$$

Сила, действующая на заряд со стороны электрического поля, у:авновешивается силой тяжести пылинки. Эту силу, действующую со стороны электрического поля, несложно выразить через потенциал на обкладках

$$F = qE = q\frac{U}{d}$$

где q - заряд на пылинке. Отсюда:

$$q = \frac{mgd}{U},$$

Проверим размерность:

$$[q] = \text{Кл} = \frac{\text{кг}\cdot(\frac{\text{м}}{c^2})\cdot\text{м}}{\text{В}} = \frac{\text{кг}\cdot\left(\frac{\text{м}}{c^2}\right)\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{Дж}} = \frac{\text{кг}\cdot\left(\frac{\text{м}}{c^2}\right)\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{кг}\cdot(\frac{\text{м}^2}{\text{c}^2})};$$

И вычислим количество избыточных элементарных зарядов

$$n = \frac{q}{e} = \frac{mgd}{Ue} = \frac{8\cdot 10^{-15}\cdot 9,81\cdot 0,01}{490\cdot 1,6\cdot 10^{-19}} = 10.$$

Ответ: 10.

Задача 5

Электрон влетает в пространство между обкладками плоского конденсатора в середине зазора в направлении, параллельном обкладкам со скоростью $2\cdot 10^7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. При какой минимальной разности потенциалов на обкладках электрон не вылетит из конденсатора, если длина конденсатора 10 см, а расстояние между его обкладками 1 см?

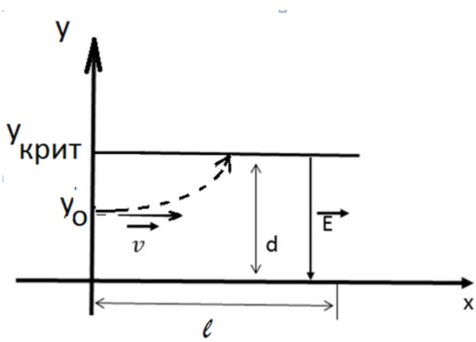
Дано:

$v = 2\cdot 10^7\,\frac{\text{м}}{c}$;

$l = 10$ см $= 0,1$ м;

$d = 1$ см $= 0,01$ м;

$e = 1,6\cdot\ 10^{-19}$Кл;



$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

Найти: U_{min}.

Решение:

Электрон в конденсаторе двигается по параболе. Электрическое поле стремится притянуть электрон к обкладке. При некотором критическом значении поля электрон упадет на обкладку. Данное значение можно вычислить, составив уравнения движения по осям вдоль и перпендикулярно обкладок конденсатора. Направим ось ординат перпендикулярно направлению влета.
OY:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2}$$

Зададим y как $y_{крит}$ (длина пластин), а y_0 как точку влета. Тогда

$$y_{\text{крит}} = y_0 + \frac{at_{\text{крит}}^2}{2}, \tag{60}$$

где $t_{\text{крит}}$ это критическое время, за которое частица не выйдет за пределы конденсатора при равномерном движении вдоль оси x.

По оси ОX движение равномерное и может быть записано как

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

Выбирая координату точки влета равной нулю, найдем критическое время, полагая координату равной длине конденсатора.

$$t_{\text{крит}} = \frac{l}{v_{0x}} \tag{61}$$

Подставляем (60) в (61) и находим ускорение, с которым должен двигаться электрон, чтобы не вылететь за пределы конденсатора. Оно оказывается равным $4\cdot10^{16}$ м/с^2. Теперь нетрудно вычислить минимальную разность потенциалов между обкладками

$$ma = F = eE = e\frac{Umin}{d} \Rightarrow Umin = \frac{adm}{e},$$

что в результате вычислений дает 2275 В.

Ответ: $Umin = 2275$ В

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Теорема Остроградского-Гаусса (ТОГ), которую мы собираемся обсудить, является, так же как и теорема Стокса, математической теоремой, доказанной учеными Остроградским и Гауссом для некоторых векторных функций. Выяснилось, что ТОГ без каких-либо модификаций устанавливает связь между электрическими зарядами и созданным ими электрическим полем, представляя собой в какой-то степени более общую и изящную формулировку закона Кулона. Иногда ТОГ для краткости называют теоремой Гаусса.

Впервые ТОГ применял (интуитивно) *Лагранж* в 1867, преобразовывая тройные интегралы в двойные с помощью интегрирования по частям.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855).

Остроградский Михаил Васильевич (1801 – 1862).

Гаусс Карл Фридрих проводил исследования в многих разделах физики.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г.

Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).

Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

В 1813, 1830 гг показал общий метод преобразования тройного интеграла к поверхностному.

Остроградский Михаил Васильевич, отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те, совершенствовал знания в Париже.

Основные научные работы написаны им в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. В 1826 году вывел математическую формулировку ТОГ в общем виде, представив её в виде теоремы в 1831.

Поток линий электрического поля

Для того, чтобы сформулировать ТОГ, введем понятие потока силовых линий ЭП.

Потоком (*Ф*) *линий электрического поля называют* *количество линий, пронизывающих площадку площади S.* (Рис. 24).

Если все элементы площадки перпендикулярны силовым линиям и поле напряженностью *E* однородно, можно записать:

$$\Phi = E\,S \qquad (62)$$

Для неоднородного поля и площадки произвольной ориентации по отношению к линиям необходимо использовать дифференциальное соотношение

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} \qquad (63)$$

понимая под точкой скалярное произведение.

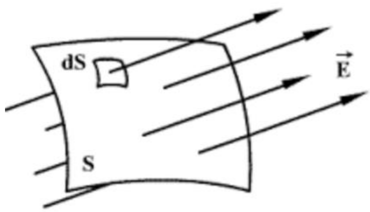


Рис. 24. Пример потока линий ЭП через поверхность произвольной формы.

Напомним, что под **вектор**ом **площади** понимается *вектор, имеющий направление нормали к площади, и численно равный площади.*

$$\vec{S} = \vec{n}S \qquad (64)$$

Можно сформулировать следующие свойства потока:

- Поток через замкнутую поверхность, суммарный заряд внутри которой равен нулю, так же равен нулю.

-Поток - это скаляр, который, в зависимости от направления поля может быть либо положительным, либо отрицательным

В качестве примера рассмотрим поток через различные поверхности, изображенные на Рис. 25. Поверхность A_1 окружает задача положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi > 0$ Поверхность A_2 окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi < 0$ и направлен внутрь. Если считать, что оба заряда одинаковы, то поток через поверхность A, окружающую оба заряда, равен нулю.

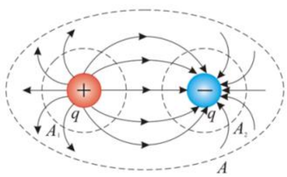


Рис. 25.Поток через различные поверхности, окружающие систему зарядов.

Для того, чтобы сформулировать ТОГ запишем поток вектора напряженности электрического поля через произвольную элементарную площадку dS в направлении нормали (Рис. 26) как

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha = E_n dS \quad (65)$$

Интегрируя, получаем

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS \quad (66)$$

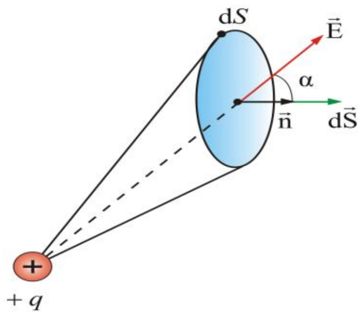


Рис. 26. Расчет потока через замкнутую поверхность произвольной формы.

Подсчет потока линий ЭП через сферическую замкнутую поверхность.

Применим полученные формулы для подсчета потока вектора через сферическую замкнутую поверхность S_1, окружающую точечный заряд q (Рис. 27).

Выберем центр сферы совпадающим с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1. В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2} \qquad (67)$$

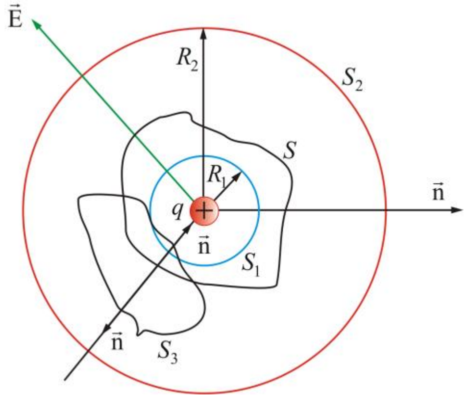


Рис. 27. Вычисление потока через сферическую поверхность.

Тогда поток через поверхность S_1 равен:

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{68}$$

Или

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{69}$$

Заметим, что формулы записаны здесь в системе СИ. Аналогично можно подсчитать поток через сферу S_2:

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{70}$$

Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме

Можно показать, что тому же самому (69) будет равен поток через произвольную поверхность S, ограничивающую заряд. Аналогичное справедливо для нескольких зарядов внутри поверхности интегрирования.

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \qquad (71)$$

Таким образом, полный поток вокруг системы зарядов, сумма которых равна q будет равен

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (72)$$

и равным нулю вокруг области, не содержащей заряды. (72) называют ТОГ для случая электрических зарядов, хотя в действительности уравнение скорее является следствием из формулы Гаусса-Остроградского, математическую формулировку которой приведем далее.

Формулу (72) нередко расширяют на случай области, содержащей распределённые заряды. Поскольку

$$\sum q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad (73)$$

и

$$\Phi_E = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad (74)$$

Поток можно записать как

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad (75)$$

Формула (75) распространяет ТОГ на случай распределенных зарядов.

Понятие дивергенции

Для понимания дальнейшего изложения необходимо ввести величину, называемую дивергенцией. Рассмотрим векторную функцию $\boldsymbol{E}$, непрерывную вместе со своими производными. Вычислим ее поток через замкнутую поверхность (Рис. 28).

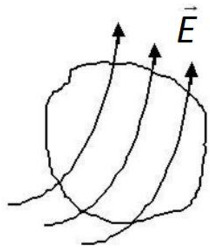


Рис. 28. Поток векторной функции через замкнутую поверхность произвольной формы (случай плоскости).

Устремим объем, ограниченный поверхностью к нулю.

$$div\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} \quad (76)$$

(76) является математическим определением дивергенции, не зависящим от системы координат. В Декартовой системе дивергенцию можно записать как

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (77)$$

Слово «дивергенция» является транслитом английского «divergence» (истечение). Действительно, если представить себе векторную функцию как поток воды через некоторое поперечное сечение, то дивергенция будет количеством воды, проходящим за единицу времени.

Как и градиент, дивергенцию можно записать с помощью оператора «набла» (40). Напомним, что оператор набла в применении к скалярной функции имеет смысл градиента, а в применении к векторной – дивергенции.

$$div\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (78)$$

Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме в дифференциальной форме

Удобно применять в ряде случаев дифференциальную формулировку ТОГ. Вспомним (64). Пусть заряд распределен в объеме со средней плотностью $<\rho>$. Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{< \rho > \Delta V}{\varepsilon_o} \qquad (79)$$

Разделив на ΔV получим

$$\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{< \rho >}{\varepsilon_o} \qquad (80)$$

Теперь устремим ΔV к нулю, стягивая его к интересующей нас точке. При устремлении объема к нулю средняя плотность заряда становится равной локальной плотности:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{< \rho >}{\varepsilon_o} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \ . \qquad (81)$$

Обобщая,

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (82)$$

что является формулировкой ТОГ в применении к электрическим зарядам в дифференциальной форме. Записывая скалярное произведение, точку нередко пропускают так же, как и стрелочку над «набла» (оператором Гамильтона):

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (83)$$

Дифференциальная формулировка теоремы Гаусса через потенциал

Учитывая (43), (78) можно переписать как:

$$div\,\vec{E} = \nabla\,\vec{E} = \nabla(-\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = -\Delta\varphi \qquad (84)$$

Бывает удобно записывать ТОГ через потенциал:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (85)$$

При записи (85) мы ввели так называемый оператор Лапласа (Δ), под которым в Декартовых координатах понимается

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \qquad (86)$$

Между оператором Лапласа и Гамильтона существует следующее соотношение, в справедливости которого Читатель легко убедится самостоятельно:

$$\nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi \qquad (87)$$

Формула Гаусса-Остроградского

В заключение приведем математическую формулировку ТОГ безотносительно к электрическому полю:

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{div\vec{A}dV} = \oiint\limits_S \boldsymbol{\vec{A}\cdot\vec{n}dS} \qquad (88)$$

Здесь $\vec{\boldsymbol{A}}$ – любая непрерывная векторная функция, обладающая некоторыми математическими особенностями, имеющими отношение к непрерывности, которые любознательный читатель может найти в специализированных учебниках [6]. Справедливость (88) и ее применимость к электростатике несложно проверить, подставив плотность заряда в левую часть данного уравнения, понимая под $\boldsymbol{A}$ напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$. Тогда, осуществив интегрирование по объему, перейдем к полному заряду q, заключённому внутри поверхности. Правая же часть (88) даст поток. (88) и называют формулой Гаусса-Остроградского.

Нетрудно заметить, что с математической точки зрения (88) устанавливает связь между тройным интегралом (по объему, трех переменных) и двойным (по поверхности, двух переменных), то есть позволяет понижать порядок интегрирования.

В дальнейшем в этом курсе (выходящем за рамки данного пособия) будет изучаться еще одна теорема подобного рода – теорема Стокса, позволяющая переходить от интеграла по площади (двух переменных) к интегралу по кривой (одной переменной), существенно облегчая решение многих задач.

Интегральная форма ТОГ в применении вычислению характеристик электрического поля

Переписав предыдущее уравнения для ЭП, получаем универсальную формулировку ТОГ в ее «истинно математическом» виде:

$$\iiint\limits_V div\vec{E}dV = \oiint\limits_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{n}dS \qquad (89)$$

Значение ТОГ позволяет в некоторых случаях значительно упростить подсчет напряженности ЭП, чем можно убедиться изучив следующие примеры.

Применение ТОГ для вычисления напряжённости поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

Для вычисления напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, рассмотрим плоскость, заряженную с плотностью заряда σ. Обозначим плотность заряда как

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}. \tag{90}$$

Рассечем плоскость цилиндром, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания, соответственно, параллельны. Будем считать, что место пересечения плоскостью находится точно в середине сторон цилиндра, Рис. 29.

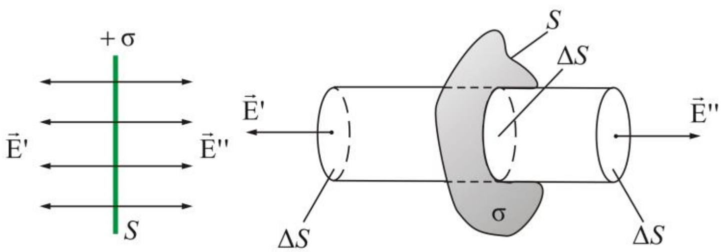


Рис. 29 Иллюстрация к вычислению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью.

Подсчитаем суммарный поток линий электрического поля Φ_E через замкнутую поверхность цилиндра. Он будет равен сумме потоков через образующие цилиндра и плоскости его оснований. В силу определения потока (65), поток через образующие равен нулю, поскольку вектор напряженности поля параллелен стенкам цилиндра ($E_n = 0$). Поток через плоскости оснований цилиндра будет равен

$$\Phi_E = 2\Delta SE \tag{91}$$

Внутри поверхности заключен заряд. Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S\,\frac{1}{\varepsilon_0} \tag{92}$$

откуда видно, что напряженность поля плоскости S равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{93}$$

Применение ТОГ для вычисления напряжённости поля бесконечной равномерно заряженной нити

Аналогично предыдущему случаю, применим ТОГ для вычисления напряженности ЭП, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью.

Представим нить в виде цилиндра радиуса R, заряженного с постоянной линейной плотностью λ

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \tag{94}$$

где dq – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра. Представим вокруг цилиндра (нити) коаксиальную замкнутую поверхность (цилиндр в цилиндре) радиуса r и длиной l (основания цилиндров перпендикулярно оси).

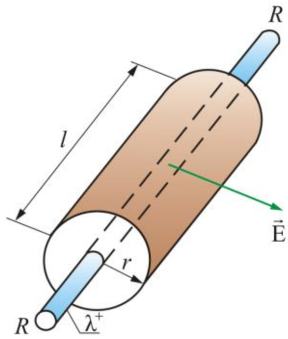


Рис. 30 К вычислению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью.

Поток Ф через основания цилиндров равен нулю. Для боковой поверхности цилиндра поток зависит от расстояния *r*. Следовательно, поток линий вектора электрического поля Е через рассматриваемую поверхность, равен :

$$E_n = 0,$$

$$E_n = E(r),$$

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl.$$

При

$$r \geq R,$$

на поверхности будет заряд

$$q = \lambda l.$$

По теореме Остроградского-Гаусса

$$E(r)2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Тогда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ при } r \geq R$$

.

Если

$$r < R,$$

то

$$E(r) = 0,$$

что можно графически изобразить, с учетом равенству нулю поля внутри сферической области, следующим образом:

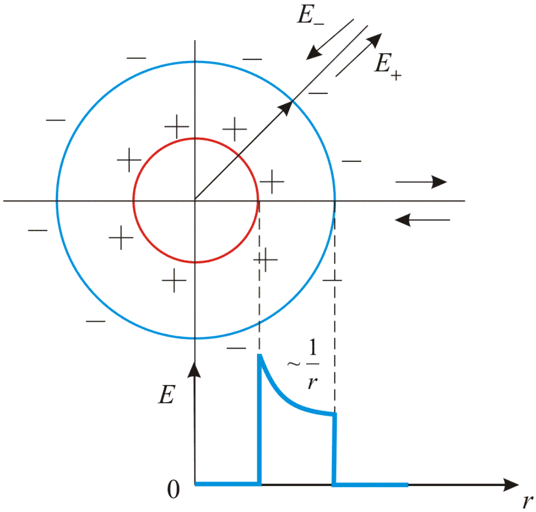


Рис. 31. Зависимость напряженности поля от расстояния для случая равномерно заряженной подповерхностен нити конечной толщины.

Применим полученный результат для вычисления потенциала на некотором расстоянии от заряженной нити. Это можно сделать с помощью интегрирования.

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{S} = -\int_{R}^{r/2} \frac{2\lambda}{r} dr = -2\,\lambda \ln r/2 + 2\,\lambda \ln R$$

Согласно своему физическому смыслу, потенциал определен с точностью до константы. Отметим, что потенциал на бесконечности в данном случае взять равным нулю не удастся.

Полезно сопоставить зависимость поля и потенциала от расстояния для объектов различной размерности (Табл. 3) и обдумать полученные результаты.

Табл. 3. Характер зависимости поля и потенциала от расстояния для объектов различной формы/размерности.

Объект	Поле	Потенциал	Прим
Не определено	$\sim\frac{1}{r^n}$, n≥5	$\sim\frac{1}{r^{n-1}}$	Ван дер Ваальсовы (дисперсион-ные) взаимодей-ствия
Квадруполь	$\sim\frac{1}{r^4}$	$\sim\frac{1}{r^3}$	
Диполь	$\sim\frac{1}{r^3}$	$\sim\frac{1}{r^2}$	
Точечный заряд	$\sim\frac{1}{r^2}$	$\sim\frac{1}{r}$	$\sim\frac{1}{r}$
Нить	$\sim\frac{1}{r}$	$\sim ln\, r$	$\sim ln\, r$
Плоскость	Const	$\sim r$	$\sim r$

Иногда приходится слышать, что напряженности поля внутри сферически заряженной поверхности по ТОГ равна нулю, поскольку в ней нет электрических зарядов. В действительности ТОГ утверждает, что только дивергенция ЭП вокруг области, не содержащей заряды, равна нулю, ничего не утверждая при этом про напряженность ЭП.

На самом деле поле внутри сферической полости действительно равняется нулю, если поверхность заряжена равномерно, но не по ТОГ, а по следствию из теоремы Беркова [7].

Заключение

В результате изучения этой книги вы узнали, как вычислять потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов или проводниками различной формы. Получили начальные представления об энергии электрического поля, свойствах электрических зарядов. Ознакомились с принципом действия конденсатора и научились определять его параметры в цепях постоянного тока. Полученные знания будут полезны при дальнейшем изучении курса электричества и магнетизма.

Задачи для самостоятельного решения

Закон Кулона

Задача 1

Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующая на четвертый заряд, помещенный на середине одной из сторон треугольника равна, равна 0,6 мкН. Определить этот заряд, напряженность и потенциал поля в точке его расположения.

Задача 2

Если в центр квадрата, в вершинах которого находятся заряды по +2 нКл, поместить отрицательный заряд, то результирующая сила, действующая на каждый заряд, будет равна нулю. Вычислить числовое значение отрицательного заряда.

Потенциал. Работа поля

Задача 3

Два одинаковых заряда находятся в воздухе на расстоянии 0,1м друг от друга. Напряженность поля в точке, удаленной на расстоянии 0,06 м от одного и 0,08 м от другого заряда, равна 10 кВ/м . Определить потенциал поля в этой точке и значение зарядов.

Задача 4

Заряд –1нКл переместился в поле заряда +1,5 нКл из точки с потенциалом 100В в точку с потенциалом 600 В. Определить работу сил поля и расстояние между этими точками.

Задача 5

Два одинаковых заряда находятся в воздухе на расстоянии 0,1 м друг от друга. Напряженность поля в точке, удаленной на расстоянии 0,06м от одного и 0,08м от другого заряда, равна 10кВ/м. Определить потенциал в этой точке и значение зарядов.

Задача 6

Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующих на четвертый заряд, помещенный на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6 мкН. Определить этот заряд, напряженность и потенциал поля в точке его расположения.

Задача 7

Заряд 1 нКл притянулся к бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью 0,2 мкКл/м^2. На каком расстоянии от плоскости находился заряд, если работа сил поля по его перемещению равна 1 мкДж?

Задача 8

Заряд 1 нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 0,1 м от поверхности металлической сферы радиусом 0,1 м, заряженной с поверхностной плотностью 10^{-3} Кл/м^2. Определить работу по перемещению заряда.

Задача 9

Два шарика массой по 2 мг подвешены в общей точке на нитях длиной 0,5 м. Шарикам сообщили заряд и нити разошлись на угол 90°.Определить напряженность и потенциал поля в точке подвеса шариков.

Задача 10

Какую работу нужно совершить чтобы заряды 1 и 2 нКл, находившиеся на расстоянии 0,5м сблизились до 0,1 м?

Поток. Теорема Гаусса

Задача 11

Поверхностная плотность заряда бесконечной равномерно заряженной плоскости равна 30 нКл/м^2. Определить поток вектора напряженности через поверхность сферы диаметром 15 см, рассекаемой этой плоскостью пополам.

Задача 12

В поле бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2 перемещается заряд из точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от плоскости, в точку на расстоянии 0,5 м от нее. Определить заряд, если при этом совершается работа 1мДж.

Конденсатор. Энергия электрического поля

Задача 13

Вычислить емкость батареи, состоящей из трех конденсаторов емкостью 1 мкФ каждый, при всех возможных случаях их соединения.

Задача 14

Энергия плоского воздушного конденсатора 0,4 нДЖ, разность потенциалов на обкладках 600 В, площадь пластин 1см^2. Определить расстояние между обкладками, напряженность и объемную плотность энергии поля конденсатора.

Задача 15

Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов 300 В. Площадь пластин 1 см2, напряженность поля в зазоре между ними 300 кВ/м. Определить поверхностную плотность заряда на пластинах, емкость и энергию конденсатора.

Задача 16

В поле бесконечной, равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2 перемещается заряд из точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от плоскости, в точку на расстоянии 0,5 м от нее. Определить заряд, если при этом совершается работа 1 мДж.

Задача 17

Два конденсатора одинаковой емкости по 3 мкФ заряжены один до напряжения 100 В, а другой – до 200 В. Определить напряжение между обкладками конденсаторов, если их соединить параллельно: а) одноименно; б) разноименно заряженными обкладками.

Задача 18

Заряд на каждом из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью 18 и 10 пкФ равен 0,09 нКл. Определить напряжение: а) на батарее конденсаторов; б) на каждом конденсаторе.

Задача 19

Под действием силы притяжения 1 мН диэлектрик между обкладками конденсатора находится под давлением 1 Па. Определить энергию и объемную плотность энергии поля конденсатора, если расстояние между его обкладками 1 мм.

Задача 20

Конденсатор емкостью 6 мкФ последовательно соединен с конденсатором неизвестной емкости и они подключены к источнику постоянного напряжения 12 В. Определить емкость второго конденсатора и напряжения на каждом конденсаторе, если заряд батареи 24 мкКл.

Задача 21

Найти объемную плотность энергии электрического поля, создаваемого заряженной металлической сферой радиусом 5см на расстоянии 5см от ее поверхности, если поверхностная плотность заряда на ней 2 мкКл/м^2.

Задача 22

Заряд 1нКл находится на расстоянии 0,2м от бесконечно длинной равномерно заряженной нити. Под действием поля нити заряд перемещается на 0,1м. Определить линейную плотность заряда нити, если работа сил поля равна 0,1мкДж.

Задача 23

Конденсатор с парафиновым диэлектриком заряжен до разности потенциалов 150 В. Напряжённость поля 6 МВ/м, площадь пластин 6 см^2. Определить ёмкость конденсатора и поверхностную плотность заряда на обкладках конденсатора.

Задача 24

Площадь пластин плоского слюдяного конденсатора 1,1 см^2, зазор между ними 3 мм. При разряде конденсатора выделилась энергия 1 мкДж. До какой разности потенциалов был заряжен конденсатор?

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ КОНСТАНТ

Название	Обозначение	Величина
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85418781762039 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Заряд электрона	e^-	$-1{,}6021766208 \cdot 10^{-31}$ Кл
(элементарный заряд)		
Масса электрона	m_e	$9{,}10938291 \cdot 10^{-31}$ кг
Электромаг-нитная постоянная (скорость света)	c	299 792 458 м/с
Масса протона		$1{,}672\,621\,898 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	h	$6{,}626\,070\,040 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ АКРОНИМЫ

ЗСЭЗ	Закон сохранения

	электрического заряда
ТОГ	Теорема Остроградского-Гаусса
ЭП	Электрическое поле
ЭквП	Эквипотенциальная поверхность
ЭМ	Электрофорная машина

Алфавитный указатель

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм И. Е., Основы теории электричества, 9 изд., М., 1976.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

3. Сивухин Д. В., Общий курс физики, 2 изд., т. 3.

4. P. Debye , Physik. Z., 36, 193, 1935.

5. P. Debye , Chem. Rev., 19, 171, 1936.

6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Москва: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1968.

7. Birkhoff, G. D. (1923). Relativity and Modern Physics. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. LCCN 23008297.